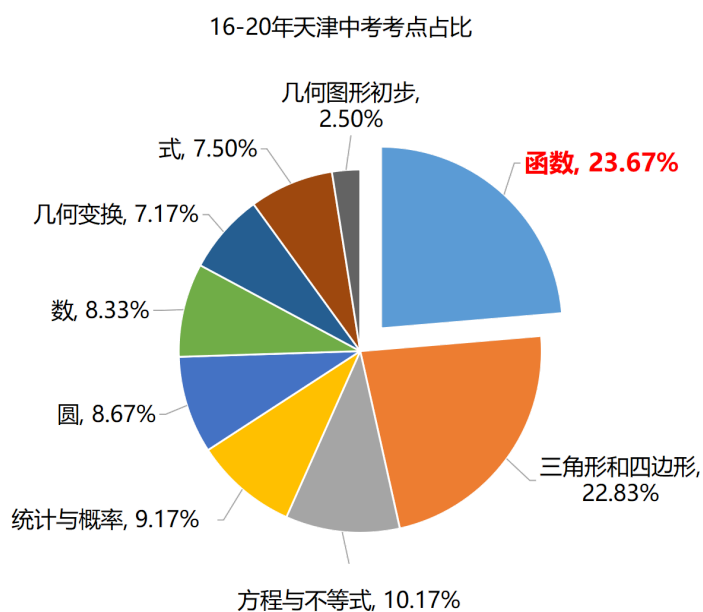


第1讲二次函数与三角形存在性

《二次函数与存在性问题》是《函数基础》、《二次函数提高》的后续模块，常以25题的形式出现在模考和中考中，难度偏高，题目的综合性较强，需要学生熟练掌握三角形、四边形的性质与判定，全等三角形、相似三角形的性质和判定、三角函数等，重点探究其综合运用，构建一定的知识体系。

本模块侧重于二次函数的代几综合，难度较大，适用于二次函数综合的查漏补缺，存在性问题的短期突破。本模块分为二次函数与三角形存在性、二次函数与四边形存在性、二次函数与角度存在性 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，巩固重难点。

知己知彼



年份	分值	占比	题号	知识点
2020	10	8%	25	最值问题
2019	10	8%	25	最值问题
2018	10	8%	25	存在性问题
2017	10	8%	25	最值问题
2016	10	8%	25	定值问题

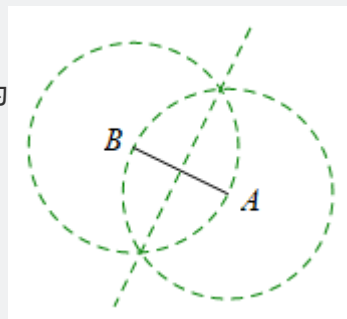
1. 等腰三角形

🗣️ 教法备注

【两圆一线法】

前提：“两定一动”型等腰三角形可借助“两圆一线”法定性分析：

如图，使 $\triangle ABC$ 构成等腰三角形的点C必在“两圆一线”上，
所谓两圆，即分别以点A、B为圆心，线段AB的长为半径作圆，对应以AB为腰的两种情形；
所谓一线，即线段AB的中垂线，对应以AB为底的一种情形；
此“两圆一线”上除不能构成三角形的点外，皆为所求点C。



“两圆一线”法的优势在于可以精准作图，清楚直观。

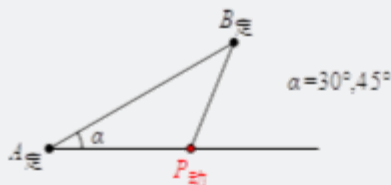
【代数解法】

前提：该三角形三边的平方为常数或者关于某个参数的二次式；

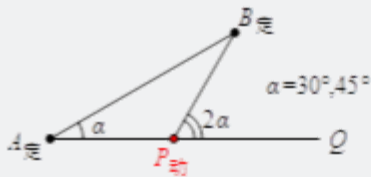
- 步骤：①写出或设出三角形三个顶点的坐标；
②利用两点间距离公式，计算三角形三条边长的平方；
③由等腰三角形的三边长（的平方）可以两两相等，需分三类，列方程求解；
④检验求出的点是否符合题意，即是否能构成三角形。

代数解法的优势是实现“盲解盲算”，可与“两圆一线”结合使用，以数解形，以形助数。特别是，当目标线段“横平竖直”时，可直接将线段长度转化为坐标，而不用列方程求解。

【一定边+特殊角】



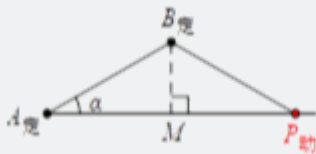
当 $PA = PB$ 时



① 求 $\angle BPQ = 2\alpha = 60^\circ$ 或 90°

② 利用 $\angle BPQ$ 与 B 点坐标求出 P 点坐标

当 $AB = BP$ 时

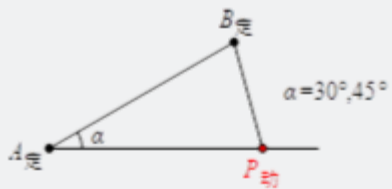


① 过点 B 作 $BM \perp AP$ 于点 M

② $AM = AB \cdot \cos \alpha$

③ 利用三线合一 $AP = 2AM$ 求出点 P 坐标

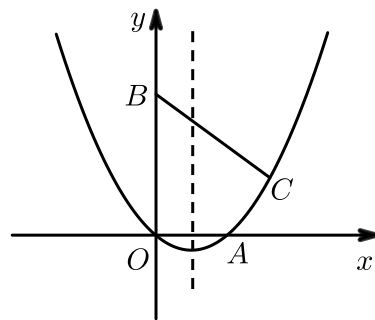
当 $AB = AP$ 时



直接利用 $PA = AB$ 求出点 P 坐标

典题精练

- 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 经过原点 O ，与 x 轴交于点 $A(5, 0)$ ，第一象限的点 $C(m, 4)$ 在抛物线上， y 轴上有一点 $B(0, 10)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式及它的对称轴.
- (2) 点 $P(0, n)$ 在线段 OB 上, 点 Q 在线段 BC 上, 若 $OP = 2BQ$, 且 $PA = QA$, 求 n 的值.
- (3) 在抛物线的对称轴上, 是否存在点 M , 使以 A, B, M 为顶点的三角形是等腰三角形? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x$.

对称轴为 $x = \frac{5}{2}$.

(2) $n = \frac{20}{3}$.

(3) 存在, 点 M 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{20+5\sqrt{19}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, \frac{20-5\sqrt{19}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{19}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{19}}{2}\right)$.

【解析】 (1) 把原点 $O(0,0)$, $A(5,0)$ 代入抛物线解析式, 得

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{6} \times 5^2 + 5b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = \frac{5}{6} \\ c = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x$.

$\therefore$ 对称轴为 $x = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$.

(2) 把 $C(m, 4)$ 代入 $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x$,

$$\text{得} \frac{1}{6}m^2 - \frac{5}{6}m = 4,$$

解得 $m_1 = 8, m_2 = -3$.

$\therefore$ 点 C 在第一象限,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(8, 4)$.

过 C 作 $CM \perp x$ 轴于 M , 连接 AC, AB ,

$$\therefore B(0, 10), A(5, 0),$$

$$\therefore BM = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (10 - m)^2},$$

$$AM = \sqrt{\left(5 - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2},$$

$$AB = \sqrt{(-5)^2 + 10^2}.$$

$\therefore$ 以 A, B, M 为顶点的三角形是等腰三角形,

$\therefore$ 当 $AM = BM$ 时,

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (10 - m)^2} = \sqrt{\left(5 - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2},$$

整理, 得 $100 - 20m = 0$,

解得 $m = 5$.

$$\therefore M\left(\frac{5}{2}, 5\right),$$

此时 A, B, M 三点共线, 不能构成三角形,

$\therefore$ 此种情况不成立.

当 $BM = AB$ 时,

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (10 - m)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2},$$

整理, 得 $m^2 - 20m - \frac{75}{4} = 0$,

$$\text{解得 } m_1 = \frac{20 + 5\sqrt{19}}{2}, m_2 = \frac{20 - 5\sqrt{19}}{2}.$$

$$\therefore M\left(\frac{5}{2}, \frac{20 + 5\sqrt{19}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, \frac{20 - 5\sqrt{19}}{2}\right).$$

当 $AM = AB$ 时,

$$\sqrt{\left(5 - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2},$$

整理, 得 $m^2 = \frac{475}{4}$.

$$\text{解得 } m_3 = \frac{5\sqrt{19}}{2}, m_4 = -\frac{5\sqrt{19}}{2}.$$

$$\therefore M\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{19}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{19}}{2}\right).$$

综上所述, 存在 M 点, 点 M 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, \frac{20 + 5\sqrt{19}}{2}\right)$ 或

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{20 - 5\sqrt{19}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{19}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{19}}{2}\right).$$

【标注】【知识点】勾股定理

【知识点】SSS

【知识点】等腰三角形的判定-两边相等

【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与等腰三角形结合

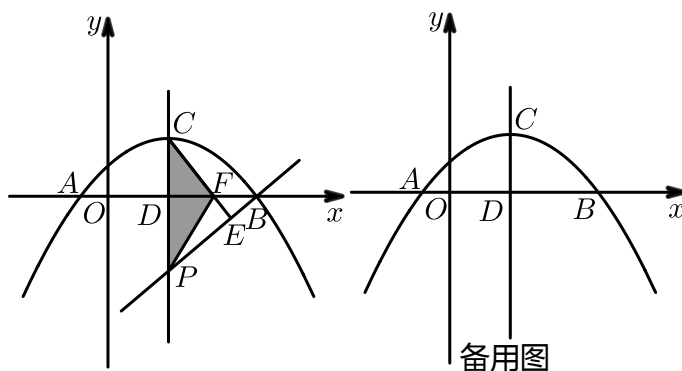
【知识点】二次函数与相似三角形结合

【知识点】二次函数与动点问题

【知识点】坐标与距离

【能力】运算能力

2. 抛物线 $y = -\frac{2}{9}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$ 两点, 顶点为 C , 对称轴交 x 轴于点 D , 点 P 为抛物线对称轴 CD 上的一动点 (点 P 不与 C , D 重合). 过点 C 作直线 PB 的垂线交 PB 于点 E , 交 x 轴于点 F .



- (1) 求抛物线的解析式.
(2) 当 $\triangle PCF$ 的面积为 5 时, 求点 P 的坐标.
(3) 当 $\triangle PCF$ 为等腰三角形时, 请直接写出点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{10}{9}$.

(2) $P(2, -3)$ 或 $P(2, 5)$.

(3) $P\left(2, \frac{-9 + 3\sqrt{13}}{2}\right)$ 或 $\left(2, \frac{-9 - 3\sqrt{13}}{2}\right)$ 或 $(2, -2)$ 或 $(2, \frac{36}{5})$.

【解析】(1) 函数的表达式为: $y = \frac{2}{9}(x+1)(x-5) = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{10}{9}$.

(2) 抛物线的对称轴为 $x = 2$,

则点 $C(2, 2)$,

设点 $P(2, m)$,

将点 P 、 B 的坐标代入一次函数表达式: $y = sx + t$ 并解得:

函数 PB 的表达式为: $y = -\frac{1}{3}mx + \frac{5m}{3}$ ①,

$\therefore CE \perp PE$,

故直线 CE 表达式中的 k 值为 $\frac{3}{m}$,

将点 C 的坐标代入一次函数表达式,

同理可得直线 CE 的表达式: $y = \frac{3}{m}x + \left(2 - \frac{6}{m}\right)$ ②,

联立①②并解得: $x = 2 - \frac{2m}{3}$,

故点 $F\left(2 - \frac{2m}{3}, 0\right)$,

$$S_{\triangle PCF} = \frac{1}{2} \times PC \times DF = \frac{1}{2}(2-m)\left(2 - \frac{2m}{3} - 2\right) = 5,$$

解得: $m = 5$ 或 -3 ,

故点 $P(2, -3)$ 或 $P(2, 5)$.

(3) 由(2)确定的点 F 的坐标得:

$$CP^2 = (2-m)^2, CF^2 = \left(\frac{2m}{3}\right)^2 + 4, PF^2 = \left(\frac{2m}{3}\right)^2 + m^2,$$

$$\text{①当 } CP = CF \text{ 时, 即: } (2-m)^2 = \left(\frac{2m}{3}\right)^2 + 4,$$

解得: $m = 0$ 或 $\frac{36}{5}$ (0舍去);

$$\text{②当 } CP = PF \text{ 时, } (2-m)^2 = \left(\frac{2m}{3}\right)^2 + m^2, \text{ 解得: } m = \frac{-9 \pm 3\sqrt{13}}{2};$$

$$\text{③当 } CF = PF \text{ 时, 同理可得: } m = \pm 2 \text{ (舍去2)},$$

$$\text{故点 } P\left(2, \frac{-9 + 3\sqrt{13}}{2}\right) \text{ 或 } \left(2, \frac{-9 - 3\sqrt{13}}{2}\right) \text{ 或 } (2, -2) \text{ 或 } \left(2, \frac{36}{5}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合

3. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, -4)$, 与 x 轴交于点 A, B , 且 $B(2, 0)$.

(1) 求该抛物线的解析式.

(2) 若点 P 是线段 AB 上的一动点, 过点 P 作 $PE \parallel AC$, 交 BC 于点 E , 连接 CP , 求 $\triangle PCE$ 面积的最大值.

(3) 若点 D 为 OA 的中点, 点 M 是线段 AC 上一点, 且 $\triangle OMD$ 为等腰三角形, 求 M 点的坐标.

【答案】(1) 为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

(2) 3.

(3) $(-2, -2)$ 或 $(-1, -3)$.

【解析】(1) 把点 $C(0, -4)$, $B(2, 0)$ 分别代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 中,

$$\text{得} \begin{cases} c = -4 \\ \frac{1}{2} \times 2^2 + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} c = -4 \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

(2) 令 $y = 0$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$,

解得 $x_1 = -4, x_2 = 2$,

$\therefore A(-4, 0), S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = 12$,

设 P 点坐标为 $(x, 0)$, 则 $PB = 2 - x$,

$\therefore PE \parallel AC$,

$\therefore \angle BPE = \angle BAC, \angle BEP = \angle BCA$,

$\therefore \triangle PBE \sim \triangle BAC$,

$\therefore \frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{PB}{AB}\right)^2$, 即 $\frac{S_{\triangle PBE}}{12} = \left(\frac{2-x}{6}\right)^2$,

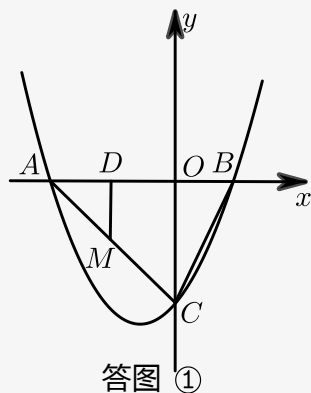
化简得: $S_{\triangle PBE} = \frac{1}{3}(2-x)^2$.

$$\begin{aligned} S_{\triangle PCE} &= S_{\triangle PCE} - S_{\triangle PBE} = -\frac{1}{2}PB \cdot OC - S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2} \times (2-x) \times 4 - \frac{1}{3}(2-x)^2 \\ &= -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x+1)^2 + 3. \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $S_{\triangle PCE}$ 的最大值为 3.

(3) $\triangle OMD$ 为等腰三角形, 可能有三种情形:

(I) 当 $DM = DO$ 时, 如答图①所示.



答图 ①

$DO = DM = DA = 2$,

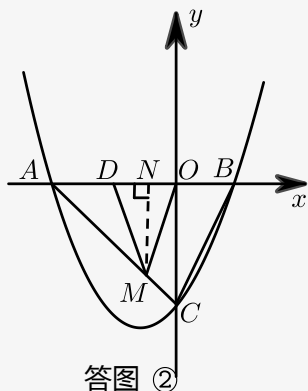
$\therefore \angle OAC = \angle AMD = 45^\circ$,

$\therefore \angle ADM = 90^\circ$,

$\therefore M$ 点的坐标为 $(-2, -2)$.

(II) 当 $MD = MO$ 时, 如答图②所示.

过点 M 作 $MN \perp OD$ 于点 N , 则点 N 为 OD 的中点,



答图 ②

$\therefore DN = ON = 1, AN = AD + DN = 3,$

又 $\triangle AMN$ 为等腰直角三角形,

$\therefore MN = AN = 3,$

$\therefore M$ 点的坐标为 $(-1, -3)$.

(III) 当 $OD = OM$ 时,

$\therefore \triangle OAC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore$ 点 O 到 AC 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$, 即 AC 上的点与点 O 之间的最小距离为 $2\sqrt{2}$.

$\therefore 2\sqrt{2} > 2, \therefore OD = OM$ 的情况不存在.

综上所述, 点 M 的坐标为 $(-2, -2)$ 或 $(-1, -3)$.

【标注】【能力】运算能力

【思想】函数思想

【知识点】二次函数与面积

【知识点】二次函数与等腰三角形结合

【知识点】二次函数的几何问题

【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与坐标轴交点

2. 直角三角形

教法备注

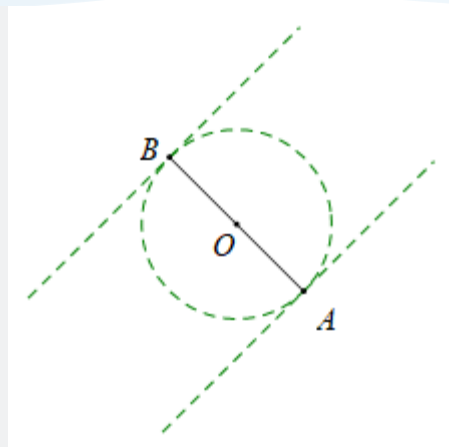
(1) 两线一圆

如图, 使 $\triangle ABC$ 为直角三角形的点 C 必在“两线一圆”上, 具体如下:

所谓“两线”, 即分别过点 A 、 B 作线段 AB 的垂线, 对应 $\angle A$ 、 $\angle B$ 为直角的两种情况;

所谓“一圆”, 即以 AB 为直径的圆, 对应以 $\angle C$ 为直角的一种情形;

此“两线一圆”上除不能构成三角形的点外，皆为所求点C．



💡 (2) 勾股定理

前提：该三角形三边的平方为常数或者关于某个参数的二次式；

步骤：①写出或设出三角形三个顶点的坐标；

②利用两点间距离公式，计算三角形三条边长的平方；

③由直角三角形的三边满足勾股定理，以斜边为标准分三类，列方程求解；

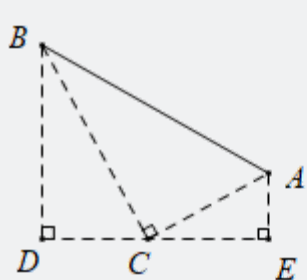
④检验求出的点是否符合题意，即是否能构成三角形．

代数解法的优势是实现“盲解盲算”，可与“两线一圆”结合使用，以数解形，以形助数．

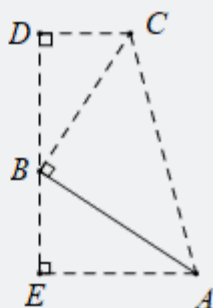
💡 (3) 一线三垂直

核心是作“横平竖直”辅助线，构造相似三角形常见模型．

构造“三垂直”型（一线三直角）



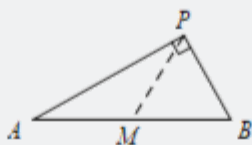
$$\frac{AE}{CD} = \frac{CE}{BD}$$



$$\frac{AE}{BD} = \frac{BE}{CD}$$

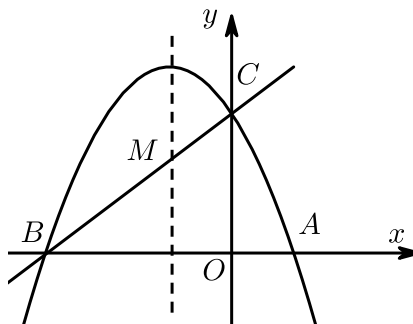
💡 (4) 斜边中线

已知 AB 为斜边,则可取 AB 中点 M ,利用 $PM = \frac{1}{2}AB$ 建立方程求解.



典题精练

4. 如图,已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$, 且抛物线经过 $A(1,0)$, $C(0,3)$ 两点, 与 x 轴交于点 B .



- (1) 若直线 $y = mx + n$ 经过 B 、 C 两点, 求直线 BC 和抛物线的解析式.
 (2) 设点 P 为抛物线的对称轴 $x = -1$ 上的一个动点, 求使 $\triangle BPC$ 为直角三角形的点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = x + 3$, $y = -x^2 - 2x + 3$.

(2) $(-1, -2)$ 或 $(-1, 4)$ 或 $(-1, \frac{3 + \sqrt{17}}{2})$ 或 $(-1, \frac{3 - \sqrt{17}}{2})$.

【解析】 (1) 依题意得:
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ a + b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

解之得:
$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$,

$\therefore$ 对称轴为 $x = -1$, 且抛物线经过 $A(1,0)$,

$\therefore$ 把 $B(-3,0)$ 、 $C(0,3)$ 分别代入直线 $y = mx + n$,

得
$$\begin{cases} -3m + n = 0 \\ n = 3 \end{cases}$$
,

解之得:
$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$
,

$\therefore$ 直线 $y = mx + n$ 的解析式为 $y = x + 3$.

(2) 设 $P(-1, t)$,

又 $\because B(-3,0)$, $C(0,3)$,

$$\therefore BC^2 = 18, PB^2 = (-1+3)^2 + t^2 = 4 + t^2,$$

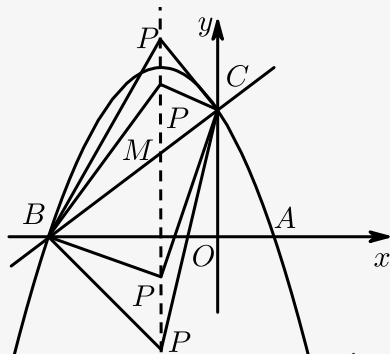
$$PC^2 = (-1)^2 + (t-3)^2 = t^2 - 6t + 10,$$

①若点B为直角顶点, 则 $BC^2 + PB^2 = PC^2$ 即: $18 + 4 + t^2 = t^2 - 6t + 10$ 解之得: $t = -2$;

②若点C为直角顶点, 则 $BC^2 + PC^2 = PB^2$ 即: $18 + t^2 - 6t + 10 = 4 + t^2$ 解之得: $t = 4$,

③若点P为直角顶点, 则 $PB^2 + PC^2 = BC^2$ 即: $4 + t^2 + t^2 - 6t + 10 = 18$ 解之得: $t_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, t_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

综上所述P的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(-1, 4)$ 或 $(-1, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$ 或 $(-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2})$.



$$P(-1, -2), P(-1, 4), P\left(-1, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right), P\left(-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right).$$

$A(1, 0), B(-3, 0), C(0, 3)$, 设 $P(-1, t)$, $BC^2 = 18, CP^2 = 1 + (t-3)^2$, $BP = 4 + t^2$,

①若 $\angle BCP = 90^\circ$, 则 $BP^2 = BC^2 + CP^2$,

$$4 + t^2 = 18 + (t-3)^2 + 1 \Rightarrow t = 4, P(-1, 4);$$

②若 $\angle CBP = 90^\circ$, 则 $BC^2 + BP^2 = CP^2$,

$$18 + 4 + t^2 = 1 + (t-3)^2 \Rightarrow t = -2, P(-1, -2);$$

③若 $\angle CPB = 90^\circ$, 则 $BC^2 = BP^2 + PC^2$,

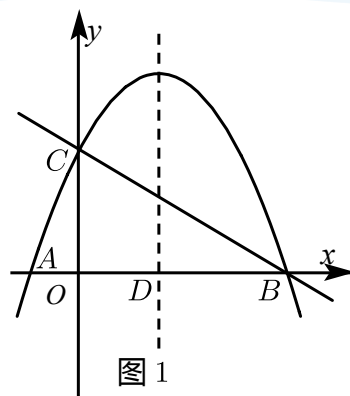
$$18 = 4 + t^2 + 1 + (t-3)^2 \Rightarrow t_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, t_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2},$$

则 $P\left(-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $P\left(-1, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$;

综上所述: $P_1(-1, 4), P_2(-1, -2), P_3\left(-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right), P_4\left(-1, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

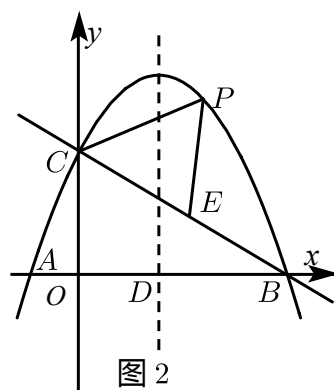
【标注】【题型】题型：二次函数与直角三角形结合

5. 如图1, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 对称轴与 x 轴交于点 D .

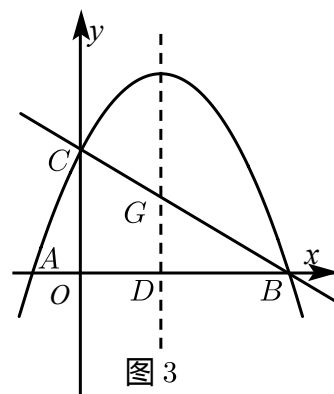


(1) 求直线 BC 的解析式.

(2) 如图2, 点 P 为直线 BC 上方抛物线上一点, 连接 PB 、 PC . 当 $\triangle PBC$ 的面积最大时, 在线段 BC 上找一点 E (不与 B 、 C 重合), 使 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的值最小, 求点 P 的坐标和 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的最小值.



(3) 如图3, 点 G 是线段 CB 的中点, 将抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 沿 x 轴正方向平移得到新抛物线 y' , y' 经过点 D , y' 的顶点为 F . 在抛物线 y' 的对称轴上, 是否存在一点 Q , 使得 $\triangle FGQ$ 为直角三角形? 若存在, 直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【答案】(1) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

(2) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

(3) 存在, $Q\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(3, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$.

【解析】(1) 当 $x=0$ 时, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$,

∴点C的坐标为 $(0, \sqrt{3})$;

当 $y = 0$ 时, 有 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} = 0$,

解得： $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$.

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b(k \neq 0)$,

将 $B(3,0)$ 、 $C(0,\sqrt{3})$ 代入 $y=kx+b$,得:

$$\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$

故答案为： $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

(2) 如图2中, 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 交直线 BC 于点 F .

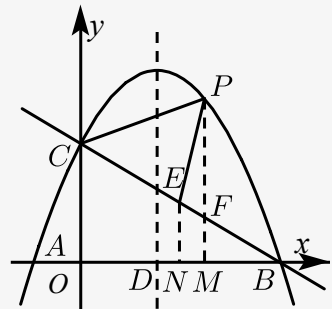
 $EN \perp x \text{轴},$ 

图 2

设 $P\left(a, -\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}a + \sqrt{3}\right)$, 则 $F\left(a, -\frac{\sqrt{3}}{3}a + \sqrt{3}\right)$,

$$\therefore PF = -\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + \sqrt{3}a,$$

$$\therefore S_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} \times PF \times 3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}a,$$

∴当 $a = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PBC}$ 最大,

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$\therefore \text{直线} BC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$
$$\therefore \angle CBO = 30^\circ, EN \perp x \text{轴},$$

$$\therefore EN = \frac{1}{2} BE,$$

$$\therefore PE + \frac{1}{2}BE = PE + EN,$$

∴根据两点之间线段最短和垂线段最短，则当 P, E, N 三点共线且垂直于 x 轴时， $PE + \frac{1}{2}BE$ 值最小。

$$\therefore PE + \frac{1}{2}BE = PE + EN = PN = \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

故答案为： $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ 。

(3) ∵ D 是对称轴直线 $x = 1$ 与 x 轴的交点， G 是 BC 的中点，

$$\therefore D(1, 0), G\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \text{直线 } DG \text{ 解析式 } y = \sqrt{3}x - \sqrt{3},$$

∴抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 沿 x 轴正方向平移得到新抛物线 y' ， y' 经过点 D ，

$$\therefore y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore F\left(3, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right),$$

∴对称轴为 $x = 3$ ，

∴ $\triangle FGQ$ 为直角三角形，

∴ $\angle FGQ = 90^\circ$ 或 $\angle FQG = 90^\circ$ ， $\angle GFQ = 90^\circ$ （不合题意，舍去）。

当 $\angle FQG = 90^\circ$ ，则 $QG \parallel x$ 轴，

$$\therefore Q\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

当 $\angle FGQ = 90^\circ$ ，设点 Q 坐标 $(3, y)$ ，

$$\therefore FQ^2 = FG^2 + GQ^2.$$

∴

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2 = \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2$$

∴

$$\therefore y = -\frac{2\sqrt{3}}{5},$$

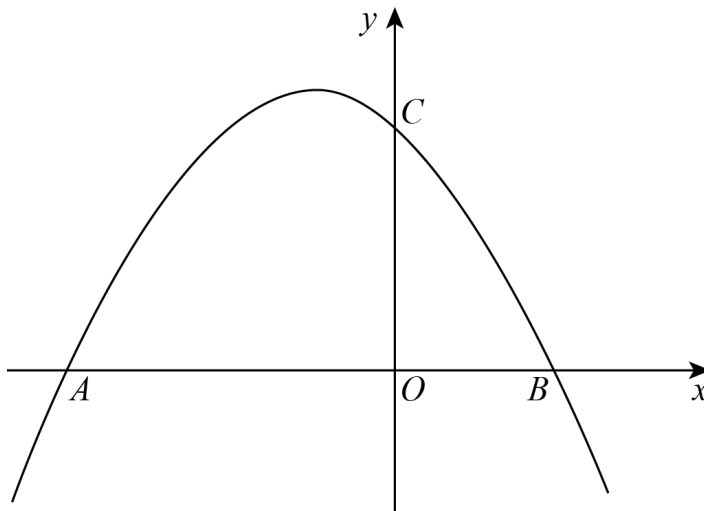
$$\therefore Q\left(3, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right),$$

综上所述： $Q\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(3, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ 。

故答案为：存在， $Q\left(3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(3, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

6. 抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求点 A 、 B 的坐标。
 (2) 设 D 为已知抛物线的对称轴上任意一点，当 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\triangle ACB$ 的面积时，求点 D 的坐标。
 (3) 当直线 l 过点 $E(4, 0)$ ， M 为直线 l 上的动点，当以 A 、 B 、 M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个时，求直线 l 的解析式。

【答案】 (1) $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 。

(2) $D\left(-1, \frac{27}{4}\right)$ 。

(3) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 或 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 。

【解析】 (1) 由 $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 = -\frac{3}{8}(x+4)(x-2)$ ，得抛物线与 x 轴的交点坐标为。对称轴 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 是直线 $x = -1$ 。

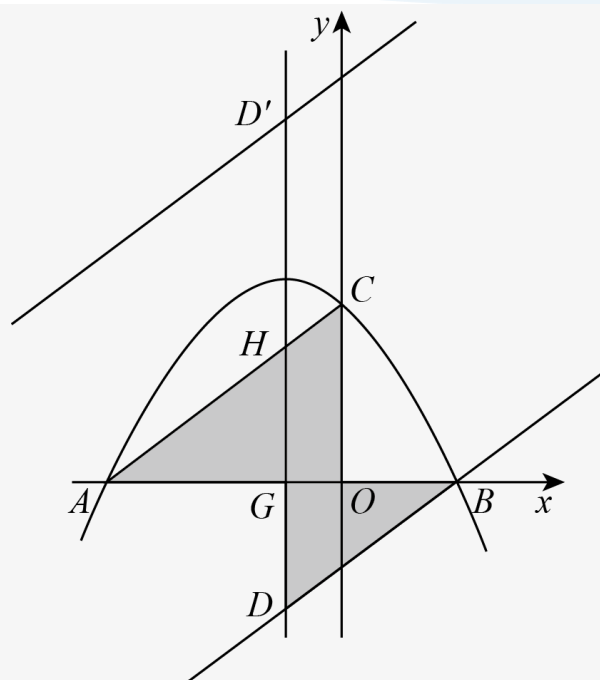
(2) $\triangle ACD$ 与 $\triangle ACB$ 有公共的底边 AC ，当 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\triangle ACB$ 的面积时，点 B 、 D 到直线 AC 的距离相等。过点 B 做 AC 的平行线交抛物线的对称轴于点 D ，在 AC 的另一侧有对应的点 D' 。设抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 G ，与 AC 交于点 H 。

由 $BD \parallel AC$ ，得 $\angle DBG = \angle CAO$

$\therefore \frac{DG}{BG} = \frac{CO}{AO} = \frac{3}{4}$ ， $\therefore DG = \frac{3}{4}BG = \frac{9}{4}$ ，点 D 的坐标为

$\left(-1, -\frac{9}{4}\right)$ $\therefore AC \parallel BD$ ， $AG = BG$ ， $\therefore HG = DG$

而 $DG = DH$ ， $\therefore DG = 3DG = \frac{27}{4}$ ， $\therefore D\left(-1, \frac{27}{4}\right)$ 。



(3) 过点 A 、 B 分别作 x 轴的垂线，这两条垂线与直线 l 总是有交点的，即两个点 M 以 AB 为直径的圆如果与直线 l 相交，那么就有两个点 M ；如果圆与直线 l 相切，就只有 1 个点 M 了。

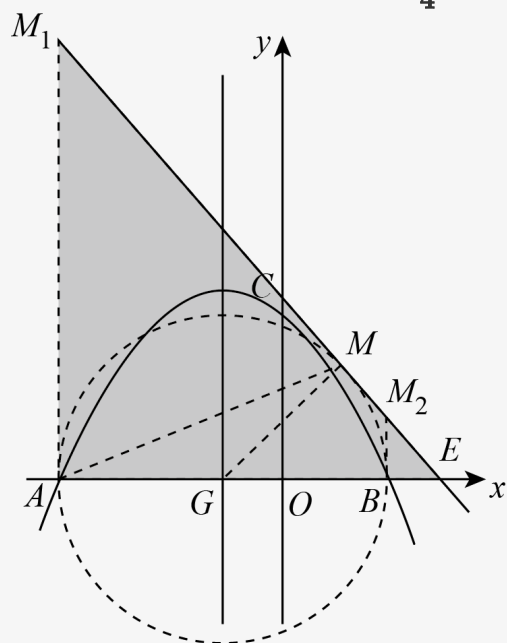
连结 GM ，那么 $GM \perp l$

在 $\text{Rt}\triangle EGM$ 中， $GM = 3$ ， $GE = 5$ ， $\therefore EM = 4$

在 $\text{Rt}\triangle EM_1A$ 中， $AE = 8$ ， $\tan \angle M_1EA = \frac{M_1A}{AE} = \frac{3}{4}$ ， $\therefore M_1A = 6$

$\therefore$ 点 M_1 的坐标为 $(-4, 6)$ ，过 M_1 、 E 的直线 l 为 $y = -\frac{3}{4}x + 3$

根据对称性，直线 l 还可以为 $y = \frac{3}{4}x - 3$ 。



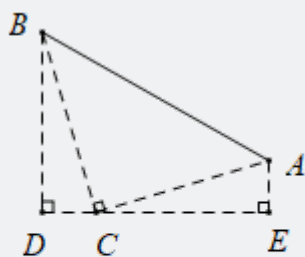
【标注】【知识点】二次函数与动点问题

3. 等腰直角三角形

教法备注

在具体的求解过程中，主要是通过作“横平竖直”辅助线，构造“一线三直角”全等模型解决．

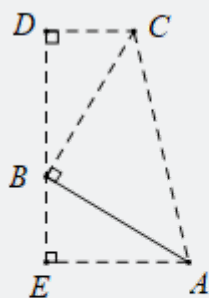
如图1：
$$\begin{cases} x_A - x_C = \frac{y_B - y_C}{1} \\ y_A - y_C = \frac{x_C - x_B}{1} \end{cases}$$



构造 $\text{Rt}\triangle AEC \cong \text{Rt}\triangle CDB$

图1

如图2，
$$\begin{cases} x_A - x_B = \frac{y_C - y_B}{1} \\ y_B - y_A = \frac{x_C - x_B}{1} \end{cases}$$

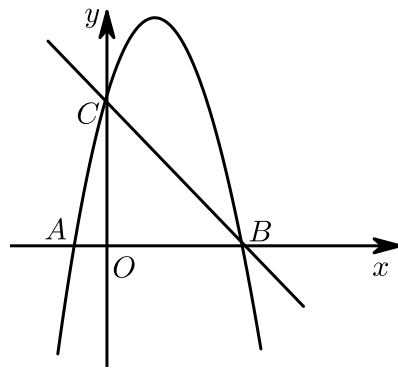


构造 $\text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle BDC$

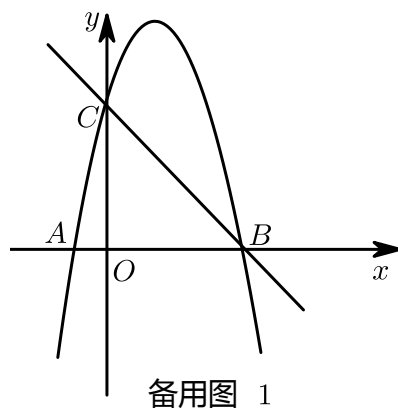
图2

典题精练

7. 如图，开口向下的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ 两点，交 y 轴于点 $C(0, 5)$ ．



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 设抛物线的顶点为 D , 求 $\triangle BCD$ 的面积 .
- (3) 在 (2) 的条件下 , P, Q 为线段 BC 上两点 (P 左 Q 右 , 且 P, Q 均不与 B, C 重合) , $PQ = 2\sqrt{2}$, 在第一象限的抛物线上是否存在这样的点 R , 使 $\triangle PQR$ 是以 RQ 为底边的等腰直角三角形 ? 若存在 , 求出的 R 的坐标 : 若不存在 , 请说明理由 .



【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x + 5$.

(2) 15 .

(3) 存在 , $R(4, 5)$ 或 $R\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$.

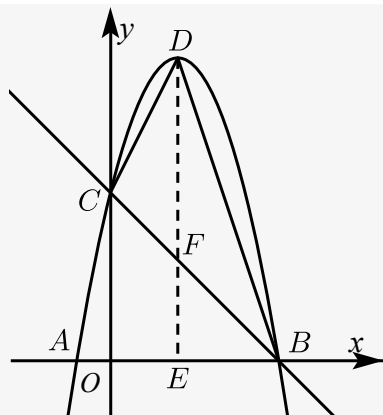
【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ c = 5 \end{cases}, \text{ 计算得出 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 : $y = -x^2 + 4x + 5$.

(2) 由 $y = -x^2 + 4x + 5 = -(x - 2)^2 + 9$ 可知顶点 D 的坐标为 $(2, 9)$,

作 $DE \perp AB$ 于 E , 交直线 BC 于 F , 如图 ,



$$\therefore E(2, 0).$$

$$\therefore B(5, 0), C(0, 5),$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -x + 5,$$

$$\text{把 } x = 2 \text{ 代入得, } y = 3,$$

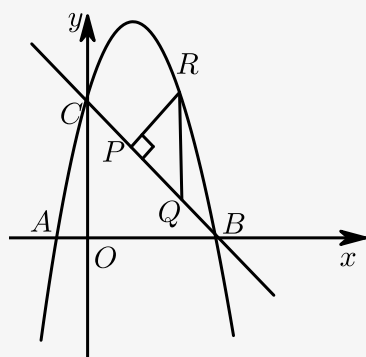
$$\therefore F(2, 3),$$

$$\therefore DF = 9 - 3 = 6,$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle BCD} &= S_{\triangle CDF} + S_{\triangle BDF} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times (5 - 2) \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \\ &= 15. \end{aligned}$$

(3) 分三种情况 ,

$$\textcircled{1} \text{ 以点 } P \text{ 为直角顶点, } \therefore Pa = 2\sqrt{2}, Ra = \sqrt{2}Pa = 4,$$



$$\therefore C(0, 5), B(5, 0),$$

$$\therefore OC = OB = 5, \therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle RQP = 45^\circ, \therefore RQ \parallel OC,$$

$$\therefore y_{BC} = -x + 5,$$

$$\text{设 } R(m, -m + 4m + 5), \text{ 则 } Q(m, -m + 5),$$

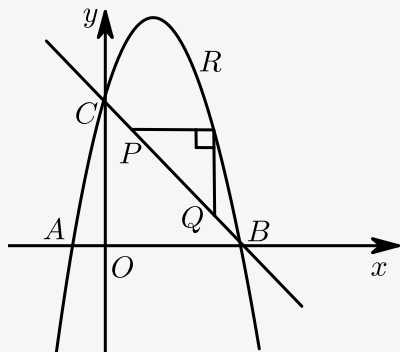
$$\text{则 } RQ = (-m + 4m + 5) - (-m + 5) = 4,$$

$$\therefore m_1 = 4, m_2 = 1, \text{ 点 } Q \text{ 在点 } P \text{ 的右侧,}$$

$$\therefore m = 4,$$

$$\therefore R(4, 5).$$

②以点R为直角顶点,



$$\therefore PQ = 2\sqrt{2}, \therefore RQ = \frac{\sqrt{2}}{2}PQ = 2,$$

$$\text{设 } R(m, -m^2 + 4m + 5), \text{ 则 } Q(m, -m + 5), PQ = 2\sqrt{2}$$

$$\text{则 } RQ = (-m + 4m + 5) - (-m + 5),$$

$$= 2,$$

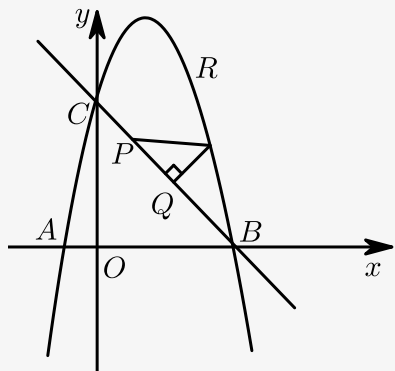
$$\therefore m_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, m_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2},$$

$\therefore$ 点Q在点P的右侧,

$$\therefore m = \frac{5 + \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore R\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right).$$

③以点Q为直角顶点,



$$\therefore PQ = 2\sqrt{2}, \therefore PR = \sqrt{2}PQ = 4,$$

$$\therefore C(0, 5), B(5, 0),$$

$$\therefore OC = OB = 5,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle RPQ = 45^\circ, \therefore PR \parallel OB,$$

$$\text{设 } R(m, -m^2 + 4m + 5), \text{ 则 } P(m - 4, -m^2 + 4m + 5),$$

$$\text{把 } P \text{ 代入 } y = -x + 5,$$

$$\therefore -(m-4) + 5 = -m^2 + 4m + 5,$$

$$\therefore m_1 = 4, m_2 = 1,$$

$$\therefore P(0, 5),$$

$\therefore$ 点 P 在线段 BC 上运动不与 BC 重合, 故舍去,

$$\text{综上, } R(4, 5) \text{ 或 } R\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

8. 如图, 抛物线 $L: y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 $B(3, 0)$ 两点 (A 在 B 的左侧), 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 已知对称轴为直线 $x = 1$.

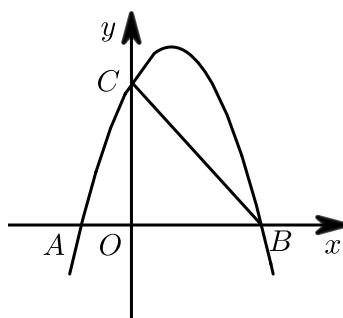


图 (1)

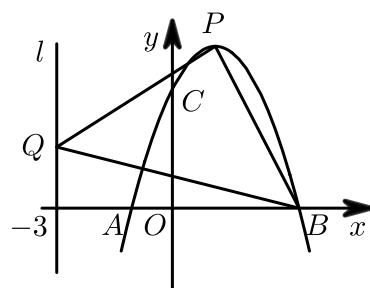


图 (2)

- (1) 求抛物线 L 的解析式.
- (2) 将抛物线 L 向下平移 h 个单位长度, 使平移后所得抛物线的顶点落在 $\triangle OBC$ 内 (包括 $\triangle OBC$ 的边界), 求 h 的取值范围.
- (3) 设点 P 是抛物线 L 上任一点, 点 Q 在直线 $l: x = -3$ 上, $\triangle PBQ$ 能否成为以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 若能, 求出符合条件的点 P 的坐标; 若不能, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) $2 \leq h \leq 4$.

(3) $(1, 4)$, $(0, 3)$, $(\frac{3 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-\sqrt{33} - 9}{2})$ 和 $(\frac{3 - \sqrt{33}}{2}, \frac{\sqrt{33} - 9}{2})$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线的对称轴 $x = 1$, $B(3, 0)$,

$$\therefore A(-1, 0)$$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $C(0, 3)$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $c = 3$.

又 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$

$$\therefore \begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为： $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) $\therefore C(0, 3)$, $B(3, 0)$,

$\therefore$ 直线 BC 解析式为 $y = -x + 3$,

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1, 4)$

$\therefore$ 对于直线 $BC : y = -x + 3$, 当 $x = 1$ 时 , $y = 2$; 将抛物线 L 向下平移 h 个单位长度 ,

$\therefore$ 当 $h = 2$ 时 , 抛物线顶点落在 BC 上 ;

当 $h = 4$ 时 , 抛物线顶点落在 OB 上 ,

$\therefore$ 将抛物线 L 向下平移 h 个单位长度 , 使平移后所得抛物线的顶点落在 $\triangle OBC$ 内 (包括 $\triangle OBC$ 的边界) ,

则 $2 \leq h \leq 4$.

(3) 设 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$, $Q(-3, n)$,

① 当 P 点在 x 轴上方时 , 过 P 点作 PM 垂直于 y 轴 , 交 y 轴与 M 点 , 过 B 点作 BN 垂直于 MP 的延长线于 N 点 , 如图所示 :

$\therefore B(3, 0)$,

$\therefore \triangle PBQ$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形 ,

$\therefore \angle BPQ = 90^\circ$, $BP = PQ$,

则 $\angle PMQ = \angle BNP = 90^\circ$, $\angle MPQ = \angle NBP$,

在 $\triangle PQM$ 和 $\triangle BPN$ 中 , $\begin{cases} \angle PMQ = \angle BNP \\ \angle MPQ = \angle NBP \\ PQ = BP \end{cases}$

$\therefore \triangle PQM \cong \triangle BPN$ (AAS) ,

$\therefore PM = BN$,

$\therefore PM = BN = -m^2 + 2m + 3$, 根据 B 点坐标可得 $PN = 3 - m$, 且

$PM + PN = 6$,

$\therefore -m^2 + 2m + 3 + 3 - m = 6$,

解得： $m = 1$ 或 $m = 0$,

$\therefore P(1, 4)$ 或 $P(0, 3)$.

② 当 P 点在 x 轴下方时 , 过 P 点作 PM 垂直于 l 于 M 点 , 过 B 点作 BN 垂直于 MP 的延长线于 N 点 ,

同理可得 $\triangle PQM \cong \triangle BPN$,

$\therefore PM = BN$,

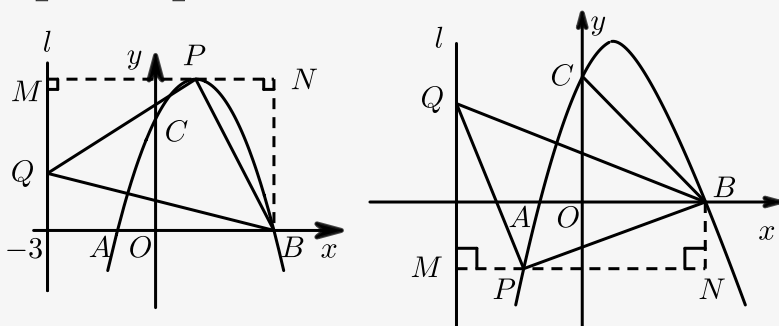
$$\therefore PM = 6 - 3 - m = 3 + m, BN = m^2 - 2m - 3,$$

$$\text{则 } 3 + m = m^2 - 2m - 3,$$

$$\text{解得 } m = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \text{ 或 } \frac{3 - \sqrt{33}}{2}.$$

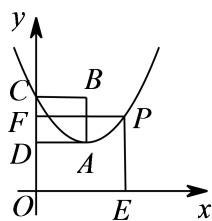
$$\therefore P\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-\sqrt{33} - 9}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2}, \frac{\sqrt{33} - 9}{2}\right).$$

综上可得, 符合条件的点 P 的坐标是 $(1, 4)$, $(0, 3)$, $\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-\sqrt{33} - 9}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{3 - \sqrt{33}}{2}, \frac{\sqrt{33} - 9}{2}\right)$.



【标注】【知识点】二次函数与动点问题

9. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$, 过点 A 、 B 分别作 y 轴的垂线, 垂足为 D 、 C , 得到正方形 $ABCD$, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 A 、 C 两点, 点 P 为第一象限内抛物线上一点 (不与点 A 重合), 过点 P 分别作 x 轴 y 轴的垂线, 垂足为 E 、 F , 设点 P 的横坐标为 m , 矩形 $PFOE$ 与正方形 $ABCD$ 重叠部分图形的周长为 l .



- (1) 直接写出抛物线所对应的函数表达式.
- (2) 当矩形 $PFOE$ 的面积被抛物线的对称轴平时, 求 m 的值.
- (3) 当 $m < 2$ 时, 求 l 与 m 之间的函数关系式.
- (4) 设线段 BD 与矩形 $PFOE$ 的边交于点 Q , 当 $\triangle FDQ$ 为等腰直角三角形时, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x + 2$.

(2) 2.

(3) 当 $0 < m < 1$ 时, $L = 2m^2 - 2m + 2$,

当 $1 < m < 2$ 时, $L = 2m^2 - 4m + 4$.

$$(4) \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq m < 1 \text{ 和 } 1 < m \leq 2 \text{ 或 } m = 2 - \sqrt{3}.$$

【解析】(1) $\because B(1, 2)$, $BC \perp y$ 轴于 C ,

$\therefore C(0, 2)$ 将点 $A(1, 1)$, $C(0, 2)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 中,

得到 $b = -2$, $c = 2$,

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为: $y = x^2 - 2x + 2$.

(2) $\because PE \parallel x$ 轴, 矩形 $PFOE$ 的面积被抛物线的对称轴平分,

$\therefore P$ 、 F 点关于抛物线的对称轴对称,

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 $(1, 1)$,

$\therefore$ 抛物线对称轴为 $x = 1$,

$\therefore OF = 1$,

$\therefore m = 2$.

(3) $\because$ 点 P 的横坐标为 m , 点 P 为第一象限, 内抛物线上的点且不与 A 重合,

$\therefore P(m, m^2 - 2m + 2)$ ($m > 0$ 且 $m \neq 1$),

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形, 且 $A(1, 1)$,

$\therefore D(0, 1)$, $B(1, 2)$, $F(0, m^2 - 2m + 2)$,

$\therefore PF = m$,

$FD = m^2 - 2m + 2 - 1 = m^2 - 2m + 1$,

根据点 P 在 A 的左右不同分两种情况(如图1),

当 $0 < m < 1$ 时,

$$L = 2 \times (PF + FD) = 2 \times (m + m^2 - 2m + 1) = 2m^2 - 2m + 2,$$

当 $1 < m < 2$ 时,

$$L = 2 \times (AD + FD) = 2 \times (m^2 - 2m + 1 + 1) = 2m^2 - 4m + 4.$$

(4) 连接 BD , 如图2所示,

设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

将 $D(0, 1)$, $B(1, 2)$ 代入得: $y = x + 1$,

联立直线 BD 与抛物线得,

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{或}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{(舍去)},$$

当 $0 < m < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 时, 若要 $\triangle FDQ$ 为等腰直角三角形,

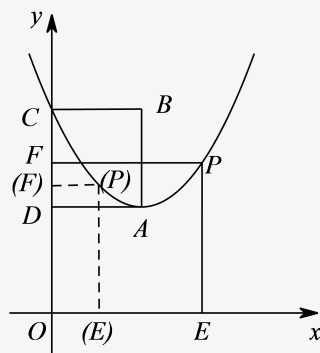


图1

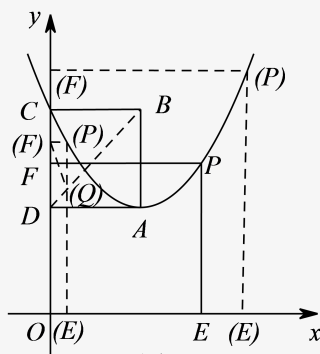


图2

只需 $FD = \sqrt{2}$, $DQ = 2PF$, 即 $m^2 - 2m + 1 = 2m$,

解得 $m = 2 - \sqrt{3}$ 或 $m = 2 + \sqrt{3}$ (舍去),

$\therefore \angle FQD = 90^\circ$, 此时 $\triangle FDQ$ 为等腰直角三角形,

当 $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq m < 1$ 时,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle FDQ = \angle CDB = 45^\circ$,

$\therefore \angle DFQ = 90^\circ$,

$\therefore \triangle FDQ$ 为等腰直角三角形,

当 $1 < m \leq 2$ 时,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle FDQ = \angle CDB = 45^\circ$,

$\therefore \angle DFQ = 90^\circ$,

$\therefore \triangle FDQ$ 为等腰直角三角形,

当 $m > 2$ 时, 线段 BD 与矩形 $PFOE$ 的边只有一个交点 D , 没有点 Q ,

$\therefore$ 不存在 $\triangle FDQ$,

综上所述, 当 $\triangle FDQ$ 为等腰直角三角形时, m 的取值范围为 $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq m < 1$

和 $1 < m \leq 2$ 或 $m = 2 - \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

4. 相似三角形

教法备注

①相似三角形存在性问题的关键在于先找到一组等角

比较明显的如存在公共角、对顶角、双直角等; 比较隐蔽的如需要通过计算说理或通过构造等角.

②若相似的三角形中有一个确定的三角形, 可以先对其边、角作研究, 定边求定长, 定角求定比, 然后再寻找目标三角形.

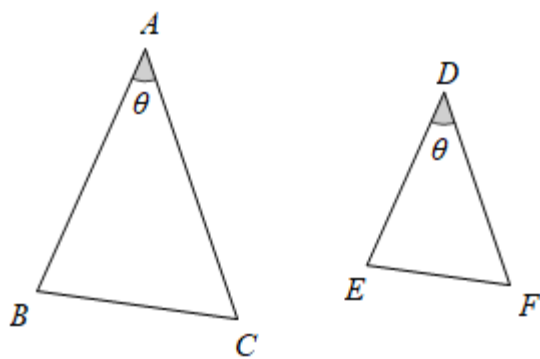
注: 定边定长: 确定的边, 其长度确定, 必可求;

定角定比: 确定的角, 其三角函数值确定, 必可求.

此处根据题目条件灵活选择:

①导边处理: 以这两个相等角的两邻边分两种情形对应成比例列方程;

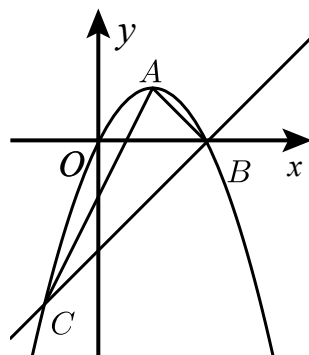
如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，若已确定 $\angle A = \angle D$ ，则要使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，需要分两种情形讨论：
 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ 或 $\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{DE}$ ，再依次列方程求解。
 此法通用性更强，普适性更广，往往是首选。



②导角处理：使另两个内角分两类对应相等；
 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，若已确定 $\angle A = \angle D$ ，则要使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，需要分两种情形讨论： $\angle B = \angle E$ ，
 或 $\angle B = \angle F$ ，再导角分析处理。
 此法最后常转化为角的存在性问题。

典题精练

10. 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线经过原点 O ，顶点为 $A(1, 1)$ ，且与直线 $y = x - 2$ 相交于 B, C 两点。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 求 B, C 两点的坐标。
- (3) 若点 N 为 x 轴上的一个动点，过点 N 作 $MN \perp x$ 轴与抛物线交于点 M ，则是否存在以 O, M, N 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x$ 。

(2) $B(2, 0), C(-1, -3)$ 。

(3) 存在满足条件的 N 点，其坐标为 $(\frac{5}{3}, 0)$ 或 $(\frac{7}{3}, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(5, 0)$ 。

【解析】 (1) $\because$ 顶点坐标为 $A(1, 1)$ ，

$\therefore$ 设抛物线解析式为 $y = a(x - 1)^2 + 1$ ，

又抛物线过原点，

$\therefore 0 = a(0 - 1)^2 + 1$ ，解得 $a = -1$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -(x - 1)^2 + 1$ ，

$$\text{即 } y = -x^2 + 2x .$$

$$(2) \text{ 联立抛物线和直线方程可得 } \begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = x - 2 \end{cases} ,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} ,$$

$$\therefore B(2, 0), C(-1, -3) .$$

(3) 存在 ,

理由 : 假设存在满足条件的点 N ,

设 $N(x, 0)$, 则 $M(x, -x^2 + 2x)$,

$$\therefore ON = |x| , MN = |-x^2 + 2x| ,$$

$$\text{由 (2) 知 , } AB = \sqrt{2} , BC = 3\sqrt{2} ,$$

$\therefore MN \perp x$ 轴于点 N ,

$$\therefore \angle ABC = \angle MNO = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 当 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MNO$ 相似时 , 有 $\frac{MN}{AB} = \frac{ON}{BC}$ 或 $\frac{MN}{BC} = \frac{ON}{AB}$,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{MN}{AB} = \frac{ON}{BC} \text{ 时 ,}$$

$$\frac{|-x^2 + 2x|}{\sqrt{2}} = \frac{|x|}{3\sqrt{2}} , \text{ 即 } |x| \cdot |-x + 2| = \frac{1}{3}|x| ,$$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时 O, M, N 不能构成三角形 ,

$$\therefore x \neq 0 ,$$

$$\therefore |-x + 2| = \frac{1}{3} , \text{ 解得 } x = \frac{5}{3} \text{ 或 } x = \frac{7}{3} ,$$

此时 N 点坐标为 $(\frac{5}{3}, 0)$ 或 $(\frac{7}{3}, 0)$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{MN}{BC} = \frac{ON}{AB} \text{ 时 ,}$$

$$\frac{|-x^2 + 2x|}{3\sqrt{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}} ,$$

$$\text{即 } |x| \cdot |-x + 2| = 3|x| ,$$

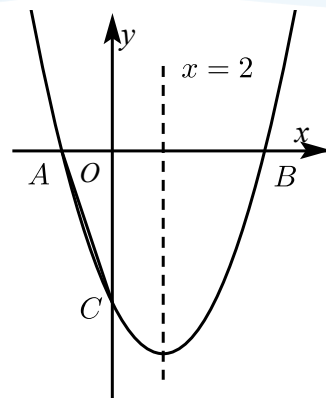
$$|-x + 2| = 3 , \text{ 解得 } x = 5 \text{ 或 } x = -1 ,$$

此时 N 点坐标为 $(-1, 0)$ 或 $(5, 0)$,

综上所述 , 存在满足条件的 N 点 , 其坐标为 $(\frac{5}{3}, 0)$ 或 $(\frac{7}{3}, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(5, 0)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

11. 如图 , 在平面直角坐标系 xOy 中 , 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-2, 0)$, $C(0, -6)$, 其对称轴为直线 $x = 2$.



- (1) 求该二次函数的解析式 .
- (2) 若直线 $y = -\frac{1}{3}x + m$ 将 $\triangle AOC$ 的面积分成相等的两部分, 求 m 的值 .
- (3) 点 B 是该二次函数图象与 x 轴的另一个交点, 点 D 是直线 $x = 2$ 上位于 x 轴下方的动点, 点 E 是第四象限内该二次函数图象上的动点, 且位于直线 $x = 2$ 右侧. 若以点 E 为直角顶点的 $\triangle BED$ 与 $\triangle AOC$ 相似, 求点 E 的坐标 .

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.

(2) $m = -2$.

(3) $(4, -6)$ 或 $\left(\frac{5 + \sqrt{145}}{3}, \frac{1 - \sqrt{145}}{9}\right)$.

【解析】 (1) 由已知得 $\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ c = -6 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -6 \end{cases}$,

故抛物线的表达式为: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$,

同理可得直线 AC 的表达式为: $y = -3x - 6$.

(2) 联立 $\begin{cases} y = -3x - 6 \\ y = -\frac{1}{3}x + m \end{cases}$, 解得: $x = -\frac{3}{8}(m + 6)$,

直线 $y = -\frac{1}{3}x + m$ 与 y 轴的交点为 $(0, m)$,

$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$,

由题意得: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}(m + 6)(m + 6) = 3$,

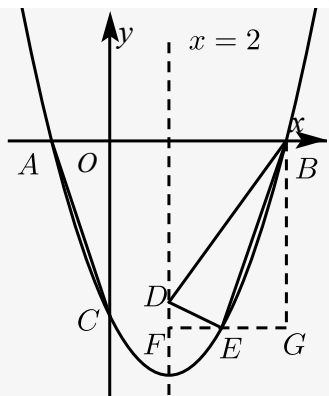
解得, $m = -2$ 或 -10 (舍去 -10),

$\therefore m = -2$.

(3) $\because OA = 2, OC = 6, \therefore \frac{OC}{OA} = 3$,

①当 $\triangle DEB \sim \triangle AOC$ 时, 则 $\frac{BE}{DC} = \frac{OC}{OA} = 3$,

如图, 过点 E 作 $EF \perp$ 直线 $x = 2$, 垂足为 F , 过点 B 作 $BG \perp EF$, 垂足为 G ,



则 $\text{Rt}\triangle BEG \sim \text{Rt}\triangle EDF$,

则 $\frac{BG}{EF} = \frac{EB}{ED} = 3$, 则 $BG = 3EF$,

设点 $E(h, k)$, 则 $BG = -k$, $FE = h - 2$,

则 $-k = 3(h - 2)$, 即 $k = 6 - 3h$,

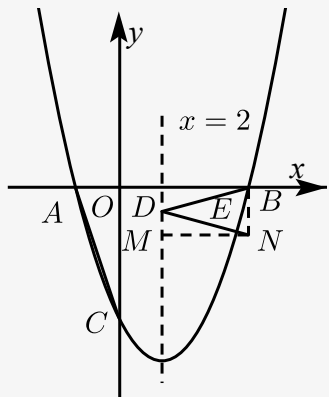
$\because$ 点 E 在二次函数上, 故 $\frac{1}{2}h^2 - 2h - 6 = 6 - 3h$,

解得: $h = 4$ 或 -6 (舍去 -6),

则点 $E(4, -6)$;

② 当 $\triangle BED \sim \triangle AOC$ 时, $\frac{BE}{ED} = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{3}$,

过点 E 作 $ME \perp$ 直线 $x = 2$, 垂足为 M , 过点 B 作 $BN \perp ME$, 垂足为 N ,



则 $\text{Rt}\triangle BEN \sim \text{Rt}\triangle EDM$, 则 $\frac{BN}{EM} = \frac{BE}{DE} = \frac{1}{3}$, 则 $NB = \frac{1}{3}EM$,

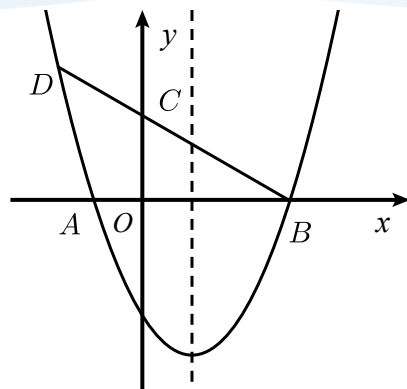
设点 $E(p, q)$, 则 $BN = -q$, $EM = p - 2$,

则 $-q = \frac{1}{3}(p - 2)$, 解得: $p = \frac{5 + \sqrt{145}}{3}$ 或 $\frac{5 - \sqrt{145}}{3}$ (舍去);

故点 E 坐标为 $(4, -6)$ 或 $\left(\frac{5 + \sqrt{145}}{3}, \frac{1 - \sqrt{145}}{9}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

12. 如图, 抛物线 $y = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 点 A, B 分别位于原点的左、右两侧, $BO = 3AO = 3$, 过点 B 的直线与 y 轴正半轴和抛物线的交点分别为 C, D , $BC = \sqrt{3}CD$.



- (1) 求 b, c 的值 .
- (2) 求直线 BD 的函数解析式 .
- (3) 点 P 在抛物线的对称轴上且在 x 轴下方, 点 Q 在射线 BA 上 . 当 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BPQ$ 相似时, 请直接写出所有满足条件的点 Q 的坐标 .

【答案】 (1) $b = -\frac{3+\sqrt{3}}{3}, c = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

(2) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

(3) $\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $\left(-1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $(1 - 2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(5 - 2\sqrt{3}, 0)$.

【解析】 (1) $\because BO = 3AO = 3$,

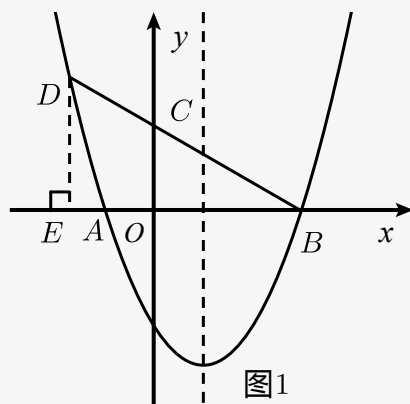
$\therefore$ 点 $B(3, 0)$, 点 $A(-1, 0)$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 :

$$y = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(x+1)(x-3) = \frac{3+\sqrt{3}}{6}x^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{3}x - \frac{3+\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore b = -\frac{3+\sqrt{3}}{3}, c = -\frac{3+\sqrt{3}}{2} .$$

(2) 如图1, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,



$\therefore CO \parallel DE$,

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{BO}{OE} ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{3}CD, BO = 3 ,$$

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{3}{OE},$$

$$\therefore OE = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点} D \text{的横坐标为} -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点} D \text{的坐标为} (-\sqrt{3}, \sqrt{3} + 1),$$

$$\text{设直线} BD \text{的函数解析式为: } y = kx + b,$$

$$\text{由题意可得: } \begin{cases} \sqrt{3} + 1 = -\sqrt{3}k + b \\ 0 = 3k + b \end{cases},$$

$$\text{解: } \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线} BD \text{的函数解析式为} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$

$$(3) \therefore \text{点} B(3, 0), \text{点} A(-1, 0), \text{点} D(-\sqrt{3}, \sqrt{3} + 1),$$

$$\therefore AB = 4, AD = 2\sqrt{2}, BD = 2\sqrt{3} + 2,$$

$$\text{对称轴为直线} x = 1,$$

$$\therefore \text{直线} BD: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \text{与} y \text{轴交于点} C,$$

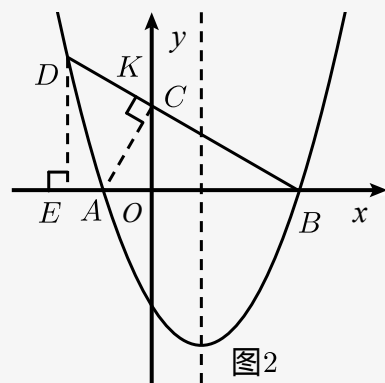
$$\therefore \text{点} C(0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle CBO = \frac{CO}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle CBO = 30^\circ,$$

如图2, 过点A作AK⊥BD于K,



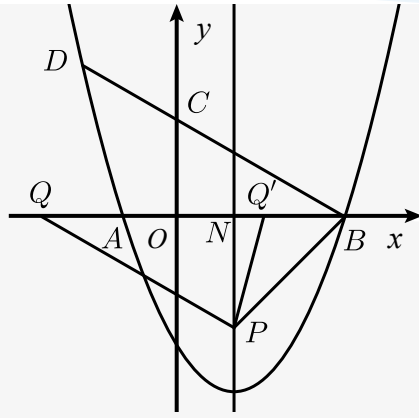
$$\therefore AK = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{8 - 4} = 2,$$

$$\therefore DK = AK,$$

$$\therefore \angle ADB = 45^\circ,$$

如图, 设对称轴与x轴的交点为N, 即点N(1, 0),



若 $\angle CBO = \angle PBO = 30^\circ$,

$$\therefore BN = \sqrt{3}PN = 2, BP = 2PN,$$

$$\therefore PN = \frac{2\sqrt{3}}{3}, BP = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

当 $\triangle BAD \sim \triangle BPQ$ 时,

$$\therefore \frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BD},$$

$$\therefore BQ = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3} \times (2\sqrt{3} + 2)}{4} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } Q \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0 \right),$$

当 $\triangle BAD \sim \triangle BQP$ 时,

$$\therefore \frac{BP}{BD} = \frac{BQ}{AB},$$

$$\therefore BQ = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3} \times 4}{2\sqrt{3} + 2} = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } Q \left(-1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}, 0 \right),$$

若 $\angle PBO = \angle ADB = 45^\circ$,

$$\therefore BN = PN = 2, BP = \sqrt{2}BN = 2\sqrt{2},$$

当 $\triangle DAB \sim \triangle BPQ$ 时,

$$\therefore \frac{BP}{AD} = \frac{BQ}{BD},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{BQ}{2\sqrt{3} + 2},$$

$$\therefore BQ = 2\sqrt{3} + 2,$$

$$\therefore \text{点 } Q (1 - 2\sqrt{3}, 0),$$

当 $\triangle BAD \sim \triangle PQB$ 时,

$$\therefore \frac{BP}{BD} = \frac{BQ}{AD},$$

$$\therefore BQ = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + 2} = 2\sqrt{3} - 2,$$

$\therefore$ 点 $Q(5 - 2\sqrt{3}, 0)$.

综上所述, 满足条件的点 Q 的坐标为 $\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $\left(-1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $(1 - 2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(5 - 2\sqrt{3}, 0)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合